

الموضوع

عمره ۱۲۰ سال - ۵۰ ساله

إذا كانت f تحليلية على C وكانت f دالة تحليلية على D
 وحلت الأضغاط المختلفة البسيط C ونفي مغايرة C
 لا يقطع a عند ∞

$$\int_C f(z) \cdot dz = \int_{c_1} f(z) dz + \dots + \int_{c_k} f(z) dz \quad \int_C f(z) dz = 0$$

$\int \sin z \cdot dz = 0$ مبرهنة: لأن لدينا دالة تحليلية على وجهين الكفاف المنلق

نقول عن نظام أنه نظام
بـ الترابي. إذا كانت
البـ يـ C وليكن Z نقطة
من داخل C عندئذ:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

المجموعة الحتمية لا تتألف
من مجموعة واحدة.

أما إذا كانت القيمة تتكون
أكثر من مجموعة واحدة فإننا

نرمز النطاق بنطاق متعدد. يمكن أن تكون قابلية على وضع
التراط. ويمكن أن تكون نقطة من داخله

و الخط النقطه 2 دائرة 3 نصف
قطرها صغير بقدر كاف

المناطق المستهدفة للتراجع: لا يمكن تتكون من داخلية C

ليكن C كفاف مغلق بسيط وبهذه الحالة تكون الدالة

$$f(z)$$

معروف الموصى له لفران

ولتكن C_j حيث $(j=1, \dots, k)$ دالة تليها C_k

کشفات منقذہ بطریق و صمد C و خار صمد C

في داخلية C وغير متقاطعة عن \mathbb{R}^n : \mathbb{R}^n غير متقطعة

متن متن . جویسات للمناطه المتعدده

الترابط يكون :

بأن f دالة تحليلية بالفرض
عند النقطة z_0 وبما أنها قابلة
للـ اشتقاق فهي متفرقة عند
النقطة z_0 هنا يعني

أنه من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \text{ كلما أن } |z - z_0| < \delta$$

هذا يعني أنه من أجل $\delta < \delta_0$
فإن المتراجحة اليسرى تكون
محققة من أجل أي نقطة من
نقاط الدائرة، كما $|z - z_0| = \delta$

يكون:

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz =$$

$$= \int_{C_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

$$\Rightarrow \int_{C_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0) + f(z_0)}{z - z_0} dz$$

$$= \int_{C_0} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz + \int_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz$$

$$= f(z_0) \int_{C_0} \frac{dz}{z - z_0} + \int_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz$$

ولكن نعلم حسب تمرين سابقة

من المحاضرة السابقة أن:

وبالتالي فإن مقياسنا:

$$\left| \int_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| <$$

$$\int_{C_0} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$$

$$\int_{C_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} |dz|$$

$$\Rightarrow \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz =$$

$$= f(z_0) \cdot 2\pi i + \underbrace{\int_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz}_{< \varepsilon}$$

$$< \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot 2\pi \cdot \delta = 2\pi \varepsilon \rightarrow 0$$

نرى من أن قيمة هذا التكامل $\rightarrow 0$

أي أن:

تساوي الصفر

$$\int_{C_0} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right) dz = 0$$

أمثلة:

مثال 1: أوجد قيمة التكامل الآتي:

$$\int_{|z|=3} \frac{2z-1}{(z-2)(z+4)} dz$$

الحل:

الكفاف المعطى هو الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $R=3$.

التكامل عبارة عن الدالة المستمرة في جنود المعادلة.

$$(z-2)(z+4)=0 \text{ أي}$$

$$z_1=2, \quad z_2=-4$$

حيث $z_1=2$ تقع داخلية الكفاف المعطى.

$z_2=-4$ تقع خارج الكفاف.

* نأخذ نقطة z_0 تقع داخل الكفاف وليس خارج.

$$\int_C \frac{2z-1}{(z-2)(z+4)} dz =$$

$$\int_C \frac{\frac{2z-1}{z-4}}{\frac{z-2}{z-2}} dz$$

$$= 2\pi i \left[\frac{2z-1}{z-4} \right]_{z=2}$$

القيمة $\frac{e^{\sin z}}{(z-3)(z-7)}$ في تحليلية على

و عند $|z|=2$ عند $z=0$ في

$$I = \int_{|z|=2} \frac{e^{\sin z}}{(z-3)(z-7)} dz$$

$$= 2\pi i \left[\frac{e^{\sin z}}{(z-3)(z-7)} \right]_{z=0}$$

$$= 2\pi i \left[\frac{e^0}{(0-3)(0-7)} \right]$$

$$I = \frac{2\pi i}{21}$$

$$\int_{|z|=3} \frac{z}{z^2+2z+2} dz$$

الحل

1- نجد الأقطاب

2- النظام الراسية لدار المسألة في جذور المعادلة

$$z^2 + 2z + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 4 - 8 = -4$$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= 2\pi i \left[\frac{4-1}{6} \right] = \frac{1}{2} 2\pi i = \pi i$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

مثال

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{\sin z}}{z(z-3)(z-7)} dz$$

الحل

الأقطاب المطبق دارة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $R=2$ النظام الراسية هي جذور المعادلة

$$z(z-3)(z-7) = 0$$

$$z_1 = 0 \text{ و } z_2 = 3$$

$$z_3 = 7$$

نقطة داخل هي $z_1 = 0$

بأكبر

$$\int \frac{f(z)}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0)$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{e^{\sin z}}{(z-3)(z-7)} dz$$

$$Z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow Z_1 = \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i$$

$$\Rightarrow Z_2 = \frac{-2 - 2i}{2} = -1 - i$$

* وضع نقطة النسبة لدايرة وهي بعد نقطة عن مركز الدائرة بقدر معين
حالات: أكبر خارج وأصغر داخل و - اوي على دائرة
ولكن نقطة سادة لا تقع على دائرة فقط داخل أو خارج

$$|Z_0 - Z_1| = |0 - (-1 + i)| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} < R=3$$

مركز دائرة

$$|Z_0 - Z_2| = |0 - (-1 - i)| = \sqrt{2} < R$$

المنطق النقطتين تقعان داخل الدائرة داخل الأضلاع
المنطق البسيط المعطى.

نقطة النقطة $Z_1 = -1 + i$ بدائرة C_1 نصف قطرها
صغير بقدر كافٍ.

ونقطة النقطة $Z_2 = -1 - i$ بدائرة C_2 نصف قطرها
صغير بقدر كافٍ لكي يكون $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.

ومع مبرهنة كوشي جوهرات للمناطق المتعددة
الترابط.

$$\int \frac{z}{(z^2 + 2z + 2)} dz = \int_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_1} dz + \int_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_2} dz$$

$$= \int_{C_1} \frac{z}{z - (-1 - i)} dz + \int_{C_2} \frac{z}{z - (-1 + i)} dz$$

$$= 2\pi i \left[\frac{z}{z(-1-i)} \right]_{z=-1+i} + 2\pi i \left[\frac{z}{z-(-1+i)} \right]_{z=-1-i}$$

$$= 2\pi i \left[\frac{-1+i}{-1+i+1+i} \right] + 2\pi i \left[\frac{-1-i}{-1-i+1-i} \right]$$

$$= 2\pi i \left(\frac{-1+i}{2i} \right) + 2\pi i \left(\frac{-1-i}{-2i} \right)$$

مثال ٢٨: أوجد قيمة تكامل $\int \frac{e^z}{z^3+2z^2-5z+2} dz$.

$$|2-1|=2$$

الحل:

- الكفاف المعطى هو الدائرة التي مركزها (1,0) ونصف قطرها $R=2$. النظام الزائدية لـ $R=2$ الدائرة هي دائرة $R=2$.

$$z^3+2z^2-5z+2=0$$

المعادلة الثلاثة جذور هي: z_1, z_2, z_3

$$z_1, z_2, z_3 = -\frac{D}{A}$$

$$\Rightarrow z_1, z_2, z_3 = -2$$

لا مقلات: $z_1=1$ بقية المعادلة:

$$(z^3+2z^2-5z+2)=0$$

$$(z-1)(z^2+3z-2)=0$$

$$z^2+3z-2$$

وبالتالي:

$$z^3+2z^2-5z+2$$

$$z^2+3z-2=0$$

$$\Rightarrow \Delta = 9+8=17$$

$$z_1 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$$

وهو يقع في دائرة الدائرة.

$$z_2 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$$

$$\Rightarrow ||z_2| = \left| \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \right|$$

$$= \left| \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \right| = \frac{1+\sqrt{17}}{2} > 2$$

لفرض لنظام الكسوف المعلق والبسط C ب S ولنثبت أنه:

$$f'(z) = \frac{1!}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s-z)^2} \cdot ds$$

مع صيغة تكامل كوشي المبسطة تكون:

$$f(z + \Delta z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s-z-\Delta z)} \cdot ds$$

z ثقتي

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{s-z} \cdot ds$$

$$\Rightarrow \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{1}{(s-z-\Delta z)} - \frac{1}{s-z} \right) f(s) \cdot ds$$

نظم المقامات

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s-z-\Delta z)(s-z)} \cdot ds$$

لنثبت الآن أن هذه العلاقة التكاملية هي في حد ذاتها $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s-z)^2} \cdot ds$ عندما Δz تسع نحو الصفر معاً بل ذلك لنثبت بأن الفرق بين التكاملين يسع نحو الصفر عندما Δz تسع نحو الصفر.

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s-z-\Delta z)(s-z)} \cdot ds - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s-z)^2} \cdot ds \right|$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int_C \left(\frac{1}{(s-z-\Delta z)(s-z)} - \frac{1}{(s-z)^2} \right) f(s) \cdot ds \right|$$

نظم المقامات

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int \frac{\Delta Z f(s)}{(s-Z-\Delta Z)(s-Z)^2} ds \right|$$

وبالاعتماد على ما سبق (مقياس التكامل) يمكن أن يكون:

$$= \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{|\Delta Z| \cdot |f(s)|}{|s-Z-\Delta Z| |s-Z|} |ds|$$

بأن f تحليلية فهي تتبلغ قيمتها العظمى وليكن $|f(s)| \leq M$ أي C .

لنفرض طول الأضلاع C بـ L .

ولنفرض $|s-Z|=d$.

حيث d أي مسافة بين النقطة Z ونقطة

$$|s-Z-\Delta Z| \geq |s-Z| - |\Delta Z| \geq d - |\Delta Z|$$

بناءً على ما سبق يأتي:

$$\leq \frac{M \cdot |\Delta Z| \cdot L}{d^2 (d - |\Delta Z|)}$$

الطرف الأيمن من المتراجحة السابقة يسو صفو الصف

عندما ΔZ تسو صفو الصف أي أن

مقياس الفرق بين التكاملين يسو صفو الصف عندما

ΔZ تسو صفو الصف وهذا يعني أن:

$$\lim_{\Delta Z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta Z) - f(z)}{\Delta Z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s-z)^2} ds$$

أي:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s-z)^2} ds$$

بشكل مشابه نثبت أنه:

$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i} \int \frac{f(s)}{(s-z)^3} ds$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}} ds$$

و نكتبه كالتالي:

كوسني المعية

امسبب التكامل التالي:

$$\int_C \frac{1}{z^2(z-2)(z-3)^2} dz$$

حيث C هي الدائرة:

$$|z-2| = \frac{3}{2}$$

الحل:

الكفاف المعطى هو الدائرة التي مركزها النقطة $z=2$ ونصف قطرها $R = \frac{3}{2}$. النقطة $z=3$ هي نقطة على C ، $z=2$ هي نقطة داخلية.

$z=3$ تقع في داخلية الكفاف ونحيط هذه النقطة بدائرة C_1 نصف قطرها صغير بقدر كاف.

و $z=2$ هي نقطة داخلية للكفاف C_2 و بقدر كاف $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.

$z=0$ تقع في خارجية الكفاف.

و اعتماداً على برهنة كوسني حول مساحات المناطق متحدة الترابط فإن

$$\int_C \frac{1}{z^2(z-2)(z-3)^2} dz = \int_{C_1} \frac{1}{z^2(z-2)(z-3)^2} dz + \int_{C_2} \frac{1}{z^2(z-3)^2} dz$$

$$= \frac{2\pi i}{1!} \left[\frac{1}{z^2(z-2)} \right]_{z=3} + 2\pi i \left[\frac{1}{z^2(z-3)^2} \right]_{z=2}$$